ボゾン系のジョセフソン接合のモデルについて (量子場の数理とその周辺)

AUTHOR(S):

神田, 智弘

数理解析研究所講究録 第2123巻 2019年 1-10

ボゾン系のジョセフソン接合のモデルについて

九州大学大学院数理学府　神田　智弘
Tomohiro Kanda
Graduate School of Mathematics,
Kyushu University

1　はじめに

このノートでは，論文 [5] の概説と今後解決したい問題点について述べる．モデルは，N 個のボーズ粒子からなる熱浴と 1 点で構成される．N 個の熱浴は最初，それぞれが平衡状態であると仮定する．$t=0$ で N 個の熱浴を一点でつなぎ，$t\rightarrow\infty$ において，非平衡定常状態 (NESS) を構成し，その公式を得た．この公式を用いて，Current や Entropy production rate(EPR) を計算し，EPR の正値性などを得た．以上が論文 [5] の概略である．この論文における NESS は Ruelle[11] の定義によるものである．つまり，ω_{0} を初期状態（熱浴を繋いでいない状態における平衡状態の product state)，α_{t} を熱浴を繋いだ時の時間発展としたとき，状態 ω_{+} が NESS であるとは，集合

$$\left\{\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\omega_{0}\circ\alpha_{t}dt\ \middle|\ T>0\right\} \tag{1.1}$$

の weak $*$-limit point となっていることである．

このノートは以下のような構成になっている．2 節においてグラフの記号の整理と，グラフ上のボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) についての概説を行う．3 節では論文 [5] において得られた結果を整理し，4 節において論文に書ききれなかったことを簡単に述べる．5 節において，今後解決したい問題について述べる．

2　準備

この章では，ワイル CCR 環とグラフの定義，グラフ上の BEC について概説する．

2.1　ワイル CCR 環について

$\mathfrak{h}$ をあるヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ の部分空間とする．$\mathfrak{h}$ よりボゾンフォック空間 $\mathcal{F}_{+}(\mathfrak{h})$，$\mathcal{F}_{+}(\mathfrak{h})$ 上に正準交換関係式 (CCR) を満たす生成・消滅演算子 $a^{\dagger}(f), a(f),\ f\in\mathfrak{h}$ が構成できる．CCR とはある定義域の上で成立する以下の交換関係式である：

$$\left[a(f), a^{\dagger}(g)\right]=a(f)a^{\dagger}(g)-a^{\dagger}(g)a(f)=\langle f, g\rangle_{\mathfrak{H}}\mathbb{1}, \quad f, g\in\mathfrak{h}. \tag{2.1}$$

ここで，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{H}}$ は $\mathfrak{H}$ 上の内積である．また，自己共役な場の演算子 $\Psi(f)$ を $\Psi(f):=\overline{\{a(f)+a^{\dagger}(f)\}}/\sqrt{2}$ を定義する．ワイル作用素 $W(f)$ は $W(f)=\exp(i\Psi(f))$ で定義されるものである．この作用素の族

$\{ W(f) \mid f \in \mathfrak{h} \}$ は以下の 3 つの式を満たす：

$$W(0) = \mathbb{1}, \quad W(f)^* = W(-f), \quad W(f)W(g) = e^{-i\frac{\mathrm{Im}\langle f,g\rangle_{\mathfrak{h}}}{2}} W(f+g), \quad f, g \in \mathfrak{h}. \tag{2.2}$$

この $\{ W(f) \mid f \in \mathfrak{h} \}$ から生成される C*-環をワイル CCR 環と呼 び，$\mathcal{W}(\mathfrak{h})$ と書く．一般に，式 (2.2) を満たすユニタリの族 $\{ W(f) \mid f \in \mathfrak{h} \}$ から生成される普遍 C*-環をワイル CCR 環と呼ぶ．([1] を参照．)

2.2　グラフ

グラフについての記号を整理する．ここでは無向グラフのみ考える．グラフ G は頂点の集合 VG と辺の集合 EG の組である．以下，VG は可算集合であると仮定する．$x, y \in VG$ に対して，x と y が隣接している時 $x \sim y$ とかく．G は無向グラフなので，$x \sim y$ ならば $y \sim x$ である．$x \in VG$ に対して，δ_x を $\delta_x(x) = 1$, $\delta_x(y) = 0$，$y \in VG, y \neq x$ と定義するとこれは $\ell^2(VG)$ 上の正規直交基底となる．$\ell^2(VG)$ 上の隣接行列 A_G を

$$\langle \delta_x, A_G \delta_y \rangle = \begin{cases} 1 & (x \sim y) \\ 0 & (x \not\sim y) \end{cases} \tag{2.3}$$

で定義する．また $x \in VG$ の次数 $\deg_G(x)$ を

$$\deg_G(x) = \sharp\{ y \in VG \mid x \sim y \} \tag{2.4}$$

と定義する．任意の $x, y \in VG$ に対して，$\deg_G(x) = \deg_G(y)$ となるものを正則 (regular) グラフと呼ぶ．また，$\deg_G = \sup_{x \in VG} \deg_G(x)$ とすると，$\sqrt{\deg_G} \leq \|A_G\| \leq \deg_G$ となることが知られている．$\deg_G < \infty$ のグラフを有界次数グラフ (bounded degree graph) という．またグラフラプラシアン $-\Delta_G$ を

$$(-\Delta_G f)(x) := \deg_G(x) f(x) - \sum_{y \sim x} f(y) \tag{2.5}$$

で定義する．このとき $-\Delta_G \geq 0$ となる．

2.3　グラフ上の BEC について

理想ボーズ気体において空間次元が 3 次元以上の時に BEC が起きる．ワイル CCR 環上の準自由状態を用いて BEC が起こっていることが計算できるが，ここでは詳しくは述べない．[1, Section 5.2.5] などを参照してほしい．ボゾンがグラフ G 上を自由に動いている時には，1 粒子のハミルトニアンをグラフラプラシアン $-\Delta_G$ もしくは $\|A_G\|\mathbb{1} - A_G$ として議論を行う．グラフにいくつかの条件を仮定すると，BEC が起こっていることが見える．ここでは，Matsui[7] と Fidaleo[3] の結果を紹介する．まずは，グラフについての仮定を整理する．

仮定 2.1. (i) グラフ G は連結かつ G の有限部分グラフの増大列 G_n が存在して，

$$G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = \lim_{n \to \infty} G_n \tag{2.6}$$

が成立している．
(ii) *Følner* 条件が成立している．つまり，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sharp \partial G_n}{\sharp G_n} = 0. \tag{2.7}$$

ここで，$\partial G_n := \{\, x \in VG_n \mid x \sim y, y \in VG \backslash VG_n \,\}$ である．
(iii) G は有界次数グラフである．つまり，$\deg_G < \infty$.

BEC が起こっているときに重要になるのが，ペロン・フロベニウスウェイト (PF ウェイト) である．

定義 2.2. B を $\ell^2(VG)$ 上の *positive preserving* な作用素とする．任意の $x \in VG$ に対して，$v(x) > 0$ かつ

$$\sum_{y \in VG} B_{xy} v(y) = \mathrm{spr}(B) v(x) \tag{2.8}$$

が成立しているときに，v を B の *PF* ウェイトと呼ぶ．ここで，$\mathrm{spr}(B)$ は B のスペクトル半径である．

ここで，

$$\mathcal{D}(v) = \{\, \xi \in \ell^2(VG) \mid \sum_{x \in VG} |\xi(x)| v(x) < \infty \,\} \tag{2.9}$$

と定義し，$\xi \in \mathcal{D}(v)$ に対して，$\sum_{x \in VG} v(x)\xi(x)$ を $\langle v, \xi \rangle$ と書くことにする．

$v \in \ell^2(VG)$ であれば通常の PF ベクトルである．ウェイトと呼んでいるのは，一般に ℓ^2 ベクトルになっていないからである．実際，$-\Delta_G$ に対しては，任意の $x \in VG$ に対して $v(x) = 1$ となるものが，PF ウェイトとなる．グラフ G の隣接行列 A_G に対しては仮定 2.1(i) の元で PF ウェイト v が存在することが [2, Proposition 4.1] で示されている．

Matsui[7] の結果を紹介する．逆温度 β と密度 ρ を与える．任意の部分グラフ G_n に対して，$\omega_n^{(\beta,\rho)}$ を β と ρ に対する平衡状態は

$$\omega_n^{(\beta,\rho)}(W(f)) = \exp\left(-\frac{1}{4}\left\langle f, (e^{-\beta(\Delta_{G_n}+\mu_n)} + \mathbb{1})(e^{-\beta(\Delta_{G_n}+\mu_n)} - \mathbb{1})^{-1} f \right\rangle\right) \tag{2.10}$$

$$\omega_n^{(\beta,\rho)}(a^\dagger(f)a(g)) = \left\langle g, (e^{-\beta(\Delta_{G_n}+\mu_n)} - \mathbb{1})^{-1} f \right\rangle \tag{2.11}$$

で与える．ここで，$\mu_n < 0$ は方程式

$$\rho = \frac{1}{\sharp G_n} \mathrm{Tr}_n((e^{-\beta(\Delta_{G_n}+\mu_n)} - \mathbb{1})^{-1}) \tag{2.12}$$

をみたすもので Tr_n は $\ell^2(VG_n)$ 上のトレースである．$\ell^2(VG)$ 上の部分空間 $\ell_0^2(VG)$ を

$$\ell_0^2(VG) = \left\{ f \in \ell^2(VG) \;\middle|\; \sum_{x \in VG} f(x) = 0 \right\} \tag{2.13}$$

と定義し，$\ell^2(VG)$ から $\ell_0^2(VG)$ への直行射影を E_0 と書く．$\rho_c(\beta)$ を

$$\rho_c(\beta) = \sup_{\mu < 0} \limsup_{n} \frac{1}{\sharp G_n} \mathrm{Tr}_n((e^{-\beta(\Delta_{G_n}+\mu)} - \mathbb{1})^{-1}) \tag{2.14}$$

と定義する．このとき，

$$\rho_c(\beta) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\sharp G_n} \mathrm{Tr}_n(E_0(e^{-\beta\Delta_{G_n}} - \mathbb{1})^{-1} E_0) \tag{2.15}$$

が成立する．

命題 2.3. [7, Proposition 1.1] グラフ G は，仮定 2.1 を満たすとする．
(i) $\rho_c(\beta) = \infty$ とする．このとき，任意の $\rho > 0$ に対して，$\mu_\infty < 0$ と有限グラフの部分列 $G_{n(i)}$ が存在して，$\lim_i \mu_{n(i)} = \mu_\infty$ かつ

$$\omega^{(\beta,\rho)}(W(f)) := \lim_i \omega_{n(i)}^{(\beta,\rho)}(W(f)) = \exp\left(-\frac{\left\langle f, (e^{-\beta(\Delta_G+\mu_\infty)} + \mathbb{1})(e^{-\beta(\Delta_G+\mu_\infty)} - \mathbb{1})^{-1} f\right\rangle}{4}\right) \tag{2.16}$$

$$\omega^{(\beta,\rho)}(a^\dagger(f)a(g)) = \lim_i \omega_{n(i)}^{(\beta,\rho)}(a^\dagger(f)a(g)) = \left\langle g, (e^{-\beta(\Delta_G+\mu_\infty)} - \mathbb{1})^{-1} f\right\rangle \tag{2.17}$$

(ii) $\rho_c(\beta) < \infty$ と仮定する．
(iia) $\rho \le \rho_c(\beta)$ ならば，$\mu_\infty = \lim_n \mu_n \le 0$ と有限部分グラフの部分列が存在して式 (2.16) と (2.17) が成立する．
(iib) $\rho > \rho_c(\beta)$ とする．このとき，

$$\rho_c(\beta) = \lim_i \frac{1}{\sharp G_{n(i)}} \mathrm{Tr}_n(E_0(e^{-\beta\Delta_{G_{n(i)}}} - \mathbb{1})^{-1} E_0) \tag{2.18}$$

を満たす任意の部分列を取る．このとき，

$$\lim_i \mu_{n(i)} = 0, \quad \lim_i \frac{1}{(\sharp G_{n(i)})(e^{-\beta\mu_{n(i)}} - 1)} = \rho - \rho_c(\beta) \tag{2.19}$$

となる，さらに，$\sup_{x\in VG} \left\langle \delta_x, (-\Delta_G)^{-1}\delta_x\right\rangle < \infty$ を仮定する．このとき，$f, g \in \mathrm{span}\,\{\, \delta_x \mid x \in VG \,\}$(閉包を取っていないことに注意) に対し，

$$\begin{aligned} &\omega^{(\beta,\rho)}(W(f)) := \lim_i \omega_{n(i)}^{(\beta,\rho)}(W(f)) \\ =&\exp\left(-\frac{\rho-\rho_c(\beta)}{2}\left|\sum_{x\in VG} f(x)\right|^2 - \frac{\left\langle f, (e^{-\beta\Delta_G} + \mathbb{1})(e^{-\beta\Delta_G} - \mathbb{1})^{-1} f\right\rangle}{4}\right) \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} &\omega^{(\beta,\rho)}(a^\dagger(f)a(g)) = \lim_i \omega_{n(i)}^{(\beta,\rho)}(a^\dagger(f)a(g)) \\ =&(\rho - \rho_c(\beta))\left(\overline{\sum_{x\in VG} g(x)}\right)\left(\sum_{x\in VG} f(x)\right) + \left\langle g, (e^{-\beta\Delta_G} - \mathbb{1})^{-1} f\right\rangle \end{aligned} \tag{2.21}$$

が成立する．

h_G を $-\Delta_G$ もしくは $\|A_G\|\mathbb{1} - A_G$ とする．h_G が

$$\sup_{x\in VG} \left\langle \delta_x, (h_G)^{-1}\delta_x\right\rangle < \infty \tag{2.22}$$

を満たすとき h_G は transient であるという．$\rho_c(\beta)$ が無限大となる場合の条件も [7, Theorem 1.1] に記されているが，今回は $\rho_c(\beta)$ が有限となる場合のみ紹介する．

定理 2.4. [7, Theorem 1.1] G は仮定 2.1 を満たし，*loop* や *multiple edge* を持たないとする．$-\Delta_G$ が *transient* であるとき，$\rho_c(\beta) < \infty$ となる．

Fidaleo[3] の結果を紹介しよう．$h_G := \|A_G\|\mathbb{1} - A_G$,

$$\mathfrak{h} := \mathrm{span}\,\{\, e^{ith_G}\delta_x \mid x \in VG \,\} \tag{2.23}$$

とする．

定理 2.5. [3, Theorem 4.5] h_G は *transient* であると仮定する．A_G に対する *PF* ウェイト v を任意に一つ固定する．このとき，$\mathfrak{h} \subset \mathcal{D}(v)$ が成立する．また，任意の $f, g \in \mathfrak{h}$ と $D \geq 0$ に対し，

$$\omega_D(a^\dagger(f)a(g)) := \left\langle g, (e^{\beta h_G} - \mathbb{1})^{-1} f \right\rangle + D\overline{\langle v, g\rangle}\langle v, f\rangle \tag{2.24}$$

と定義すると，ω_D はワイル *CCR* 環 $\mathcal{W}(\mathfrak{h})$ 上の時間発展 α に付随する *KMS* 状態となっている．ここで，時間発展 α_t は $\alpha_t(W(f)) = W(e^{ith_G} f)$ で与えられる．

注意 2.6. 式 (2.24) にて与えられる ω_D は

$$\omega_D(W(f)) = \exp\left(-\frac{\left\langle f, (e^{\beta h_G} + \mathbb{1})(e^{\beta h_G} - \mathbb{1})^{-1} f \right\rangle}{4} - D\frac{|\langle v, f\rangle|^2}{2} \right) \tag{2.25}$$

となる．また，グラフラプラシアン $-\Delta_G$ の *PF* ウェイト v は任意の $x \in VG$ に対して，$v(x) = 1$ となっていることに注意すると，式 (2.20) は

$$\omega^{(\beta,\rho)}(W(f)) = \exp\left(-\frac{\left\langle f, (e^{-\beta \Delta_G} + \mathbb{1})(e^{-\beta \Delta_G} - \mathbb{1})^{-1} f \right\rangle}{4} - \frac{\rho - \rho_c(\beta)}{2} |\langle v, f\rangle|^2 \right) \tag{2.26}$$

とも書ける．

以上の結果や [2] などより， 式 (2.24) で定義される ω_D に対して，$D > 0$ の時 BEC が起こっていると定義し，$D = 0$ の時は BEC が起こっていないと定義する．すると以下がわかる．

定理 2.7. [4, Theorem 4.5] $\mathfrak{h}$ を式 (2.23) で定義されたもの，h_G を $-\Delta_G$ もしくは $\|A_G\|\mathbb{1} - A_G$ とする．h_G は *transient* であると仮定すると，

$$\omega_D(W(f)) = \exp\left(-\frac{\left\langle f, (e^{\beta h_G} + \mathbb{1})(e^{\beta h_G} - \mathbb{1})^{-1} f \right\rangle}{4} - \frac{D}{2} |\langle v, f\rangle|^2 \right) \tag{2.27}$$

は，$D = 0$ のとき因子状態，$D > 0$ の時非因子状態となっている．

さらに，$s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\omega_{D,s_1,s_2}(W(f)) := \exp\left(-\frac{\left\langle f, (e^{\beta h_G} + \mathbb{1})(e^{\beta h_G} - \mathbb{1})^{-1} f \right\rangle}{4} + is_1 D^{1/2} \mathrm{Re}\langle v, f\rangle + is_2 \mathrm{Im}\langle v, f\rangle \right) \tag{2.28}$$

と定義すると，ω_D の因子分解として

$$\omega_D = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \omega_{D,s_1,s_2} e^{-\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}} ds_1 ds_2 \tag{2.29}$$

が得られる．

[1] や [7] などにも書かれているが，ω_D は

$$\omega_{D,\theta}(W(f)) = \exp\left(-\frac{\left\langle f, (e^{\beta h_G} + \mathbb{1})(e^{\beta h_G} - \mathbb{1})^{-1} f \right\rangle}{4} + iD^{1/2}(e^{i\theta}\langle v, f\rangle + \overline{e^{i\theta}\langle v, f\rangle}) \right) \tag{2.30}$$

を用いても因子分解できる．

3　ボゾン系におけるジョセフソン接合

論文 [5] のモデル，仮定，結果を整理する．まずモデルは次のようなものである．熱浴が N 個あり，初期状態においてそれぞれの熱浴は平衡状態であるとする．$t=0$ において全ての熱浴を 1 点で繋ぐ．$t\to\infty$ の極限において，このモデルでの currrent がどうなっているかを見たい．

モデルを数学的な枠組みで整理する．$\mathcal{K}:=\mathbb{C}\oplus(\bigoplus_{k=1}^{N}\mathfrak{K}_k)$ として，内積

$$\left\langle \begin{pmatrix} c^{(1)} \\ \psi_1^{(1)} \\ \vdots \\ \psi_N^{(1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c^{(2)} \\ \psi_1^{(2)} \\ \vdots \\ \psi_N^{(2)} \end{pmatrix} \right\rangle = \overline{c^{(1)}}c^{(2)} + \sum_{k=1}^{N} \left\langle \psi_k^{(1)}, \psi_k^{(2)} \right\rangle_k, \tag{3.1}$$

を備えているものとする．ここで，$c^{(1)},c^{(2)}\in\mathbb{C}$，それぞれの $k=1,\dots,N$ に対して，$\mathfrak{K}_k$ はヒルベルト空間で，$\mathfrak{K}_k$ の内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ と書き，$\psi_k^{(1)},\psi_k^{(2)}\in\mathfrak{K}_k$ である．$\mathcal{F}_+(\mathcal{K})$ 上で定義される一点でつないでいない場合のハミルトニアン H_0 は $\mathcal{K}$ 上で定義される一粒子に対するハミルトニアン h_0 の第 2 量子化 $H_0=d\Gamma(h_0)$ で与えられるとする．（詳しくは，[1, Section 5.2]．）h_0 は以下で与えられているとする：

$$h_0 \begin{pmatrix} c \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega c \\ h_{0,1}\psi_1 \\ \vdots \\ h_{0,N}\psi_N \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

ここで，$\Omega>0$，$c\in\mathbb{C}$，$h_{0,k}$ はそれぞれの熱浴における一粒子ハミルトニアンで $h_{0,k}\geq 0$，ψ_k は $h_{0,k}$ の定義域に含まれるベクトルとする．それぞれの熱浴を一点でつないだ場合のハミルトニアン H は 1 粒子系におけるハミルトニアン h の第 2 量子化 $H=d\Gamma(h)$ で与えられるものとする．ここで，h は次で与えられる自己共役作用素である：

$$h \begin{pmatrix} c \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega c + \lambda\sum_{k=1}^{N}\langle g_k,\psi_k\rangle \\ h_{0,1}\psi_1+\lambda c g_1 \\ \vdots \\ h_{0,N}\psi_N+\lambda c g_N \end{pmatrix} =: (h_0+\lambda V) \begin{pmatrix} c \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$\lambda>0$ は結合定数，$g_k\in\mathfrak{K}_k$ はフォームファクタである．ワイル CCR 環 $\mathcal{W}(\mathcal{K})$ 上において，写像 α_t，$t\in\mathbb{R}$ を

$$\alpha_t(W(f)) = e^{itd\Gamma(h)}W(f)e^{-itd\Gamma(h)} = W(e^{ith}f), \quad f\in\mathcal{K}, \tag{3.4}$$

で定義すると，これは $\mathcal{W}(\mathcal{K})$ 上の 1 径数自己同型群になっている．

簡単のため，ベクトルの組 ${}^t(\psi_1,\dots,\psi_N)$ や ${}^t(g_1,\dots,g_N)$ を ψ，g，また自己共役作用素 $\bigoplus_{k=1}^{N}h_{0,k}$ を $h_{0,0}$ と書くことにする．以下で，今回用いる仮定をまとめる．

(Abs)　$k=1,\dots,N$ を一つ固定する．$\psi,\xi\in\mathfrak{K}_k$ とし，ベクトルの組 (ψ,ξ) が

$$\sup_{\nu\in\mathbb{R},\varepsilon>0}\left|\left\langle\psi,(\nu-h_{0,k}\pm i\varepsilon)^{-1}\xi\right\rangle\right|<\infty. \tag{3.5}$$

を満たすとする．このとき，(ψ,ξ) は条件 (Abs) を持つという．簡単のため，ベクトル $\psi_k,\xi_k\in\mathfrak{K}_k$，$k=1,\dots,N$ の組 (ψ,ξ) の全てが条件 (Abs) を満たすとき (ψ,ξ) は条件 (Abs) を持つという．

(A) 式 (3.3) 中のフォームファクタ g が条件 (Abs) を持つ．つまり (g,g) が条件 (Abs) を持つ．

(B) 上半平面 $\mathbb{C}^+$(もしくは，下半平面 $\mathbb{C}^-$) で定義される関数 $\eta(z)$ を

$$\eta(z) := z - \Omega - \lambda^2 \int_{\sigma_0} \frac{1}{z-\nu} d\langle g, E_0(\nu) g\rangle, \tag{3.6}$$

と定義する．ここで，E_0 は $h_{0,0}$ のスペクトル測度，また σ_0 は $h_{0,0}$ のスペクトルの集合とする．このとき，$1/\eta_+ \in L^\infty(\mathbb{R})$ が成立する．ここで，$\eta_+(x) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \eta(x+i\varepsilon)$ である．

集合 $\mathfrak{h}_k(g_k)$ と $\mathfrak{h}(g)$ を

$$\mathfrak{h}_k(g_k) = \{\, \psi \in \mathfrak{K}_k \mid (\psi, g_k) \text{ は条件 (Abs) を持つ} \,\}, \quad \mathfrak{h}(g) = \left\{\, {}^t(\psi_1, \dots, \psi_N) \;\middle|\; \psi_k \in \mathfrak{h}_k(g_k) \,\right\} \tag{3.7}$$

で定義する．任意の $c \in \mathbb{C}$ と任意の $\psi \in \mathfrak{h}(g)$ に対し，$f = {}^t(c, \psi)$ と置く．このとき，

$$F(\nu; f) := c + \lambda \big\langle g, (\nu - h_{0,0} - i0)^{-1} \psi \big\rangle \left(= c + \lambda \lim_{\varepsilon \searrow 0} \big\langle g, (\nu - h_{0,0} - i\varepsilon)^{-1}\psi \big\rangle \right), \quad \text{a.e. } \nu \in \mathbb{R},$$

$$\varphi_l(f) := \psi_l + \lambda \frac{F(h_{0,0}; f)}{\eta_-(h_{0,0})} g_l, \quad \varphi(f) := \psi + \lambda \frac{F(h_{0,0}; f)}{\eta_-(h_{0,0})} g$$

で定義する．このとき，時間発展 e^{ith} について次の公式が成り立つ．

定理 3.1． [5, Theorem 2.3] 条件 (A) と (B) の下で，任意の $c, d \in \mathbb{C}$ と条件 (Abs) を満たす任意の $\psi, \xi \in \mathfrak{h}(g)$（つまり，$(\psi, \xi)$ が条件 (Abs) を満たす．）に対して以下が成立する：

$$\left\langle \begin{pmatrix} d \\ \xi \end{pmatrix}, e^{ith} \begin{pmatrix} c \\ \psi \end{pmatrix} \right\rangle = dc(t) + \langle \xi, \psi(t) \rangle, \tag{3.8}$$

ここで，

$$c(t) = \lambda \left\langle g, \frac{e^{ith_{0,0}}}{\eta_+(h_{0,0})} \varphi(f) \right\rangle, \tag{3.9}$$

$$\langle \xi, \psi(t) \rangle = \big\langle \xi, e^{ith_{0,0}} \varphi(f) \big\rangle - \lambda^2 \int_{\sigma_0} \frac{e^{it\nu}}{\eta_+(\nu)} \big\langle \xi, (h_{0,0} - \nu - i0)^{-1} g \big\rangle d\langle g, E_0(\nu) \varphi(f) \rangle. \tag{3.10}$$

Ruelle[11] の意味での非平衡定常状態を定義するため，初期の平衡状態について定義する．今回は，熱浴において BEC が起きていても良いことにする．

あるヒルベルト空間上の作用素 A の定義域を $\mathcal{D}(A)$ とかく．それぞれの $k = 1, \dots, N$ に対して，k-番目の熱浴の逆温度を $\beta_k > 0$，化学ポテンシャルを $\mu_k \le 0$ とする．v_k を $h_{0,k}$ の PF 重みとする．$\mathcal{D}(v)$ を $\mathcal{D}(v) = \bigoplus_{k=1}^N \mathcal{D}(v_k)$ と定義する．$\psi_k \in \mathfrak{K}_k$ に対して，(ψ_k) を $(\psi_k) = {}^t(0, 0, \dots, 0, \psi_k, 0, \dots, 0)$ 定義する．つまり，k-番目の成分が ψ_k でそれ以外の成分は 0 であるようなベクトルである．$\psi_k \in \mathcal{D}(v_k) \cap \mathcal{D}((e^{\beta_k(h_{0,k} - \mu_k)} - \mathbb{1})^{-1/2})$ とする．初期状態をそれぞれの k に対して，ω_0 を

$$\omega_0(W((\psi_k))) = \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \psi_k, (\mathcal{N}_k(h_{0,k}) + 1/2) \psi_k \rangle + i\Theta_k(\langle v_k, \psi_k \rangle) \right), \tag{3.11}$$

と定義する．ここで，

$$\mathcal{N}_k(x) = (e^{\beta_k(x - \mu_k)} - 1)^{-1} \tag{3.12}$$

で Θ_k は $\mathbb{C}$ 上の $\mathbb{R}$ 線形写像である．$\Theta_k(\langle v_k, \cdot \rangle)$ は (2.28) や (2.30) で与えられるものを考える．$\mu_k < 0$ の場合は $\Theta_k \equiv 0$ と定義する．NESS の公式を得るために次の仮定が必要である．

(C) 初期状態 ω_0 は

$$\left|\omega_0(a^{\natural_1}a^{\natural_2}\cdots a^{\natural_n})\right| \le n!K_n, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{3.13}$$

を満たすとする．ここで, $a^{\natural_j}=a({}^t(1,0))$ もしくは, $a^\dagger({}^t(1,0))$, かつ $K_n(>0)$ は $\lim_{n\to\infty}K_{n+1}/K_n=0$ を満たすとする．

(D) フォームファクタ g_k は $\mathcal{D}(v_k)\cap\mathcal{D}((e^{\beta_k h_{0,k}}-\mathbb{1})^{-1/2})$ の元とする．

定理 3.2. 条件 (A) から (D) の下で，任意の $c\in\mathbb{C}$ と $\psi\in\mathfrak{k}:=\mathfrak{h}(g)\cap\mathcal{D}(v)\cap(\bigoplus_{k=1}^N\mathcal{D}((e^{\beta_k h_{0,k}}-\mathbb{1})^{-1/2}))$, $f={}^t(c,\psi)$ に対して，極限

$$\lim_{t\to+\infty}\omega_0\circ\alpha_t(W(f))=\exp\left\{-\frac{1}{2}S(f)+i\Lambda(f)\right\}=:\omega_+(W(f)) \tag{3.14}$$

が存在する．ここで,

$$S(f)=\sum_{l=1}^N\langle\varphi_l(f),(\mathcal{N}_l(h_{0,l})+1/2)\varphi_l(f)\rangle, \quad \Lambda(f)=\sum_{l=1}^N\Theta_l(\langle v_l,\varphi_l(f)\rangle), \tag{3.15}$$

であり，$\langle v_l,\varphi_l(f)\rangle$ は以下で定義される：

$$\langle v_l,\varphi_l(f)\rangle:=\langle v_l,\psi_l\rangle+\frac{\lambda c\langle v_l,g_l\rangle}{\eta(0)}+\frac{\lambda^2}{\eta(0)}\langle v_l,g_l\rangle\langle g,(h_{0,0})^{-1}\psi\rangle. \tag{3.16}$$

4 $\mu_k<0$ の場合

論文 [8] でも議論されているが，全ての $\mu_k<0$ だった場合は前の節で述べた公式を使わずとも散乱理論を用いると ω_+ の表記がわかる．論文 [5] では述べていないので，ここで簡単に書いておく．$\mathcal{K}_{\mathrm{ac}}(h)$ はスペクトル測度がルベーグ測度に関して絶対連続であるようなベクトルからなる $\mathcal{K}$ の部分集合であるとする．$\mathcal{K}$ から $\mathcal{K}_{\mathrm{ac}}(h)$ への直交射影を $P_{\mathrm{ac}}(h)$ と書くことにする．h は h_0 のトレースクラス作用素による摂動であるので，Kato–Rosenblum の定理 (例えば，[9, Theorem XI. 8]) により，波動作用素

$$W_+:=\operatorname*{st-lim}_{t\to\infty}e^{-ith_0}e^{ith}P_{\mathrm{ac}}(h) \tag{4.1}$$

が存在し完全である．以下簡単のため，ω_0 は $f\in\mathcal{K}$ に対し，

$$\omega_0(W(f))=\exp\left(-\frac{\langle f,K(\mu)f\rangle}{4}\right) \tag{4.2}$$

となっているとする．ここで，K は $\mathcal{K}$ 上の作用素で,

$$K(\mu)=K_0\oplus\bigoplus_{k=1}(e^{\beta_k(h_{0,k}-\mu_k)}+\mathbb{1})(e^{\beta_k(h_{0,k}-\mu_k)}-\mathbb{1})^{-1}, \tag{4.3}$$

$\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_N)$ である．$\mu_k<0$ の場合，$(e^{\beta(h_{0,k}-\mu_k)}-1)^{-1}$ は有界作用素になるので，次が成立する．

定理 4.1. 任意の $k=1,\ldots,N$ に対し, $\mu_k<0$ と仮定する．任意の $\Omega,\lambda>0$, $g\in\bigoplus_{k=1}^N\mathfrak{K}_k$ と $f=(c,\psi)\in\mathcal{K}$ に対して，*NESS* ω_+ が存在して

$$\omega_+(W(f))=\lim_{t\to\infty}\omega_0\circ\alpha_t(W(f))=\exp\left(-\frac{\langle W_+f,K(\mu)W_+f\rangle}{4}\right) \tag{4.4}$$

となる．

5　問題

5.1　定義域の問題

e^{ith}，ω_+ の公式両方とも非常に面倒な計算を行うことで得られるものである．e^{ith} の公式については，$\langle v, e^{ith}\psi\rangle$ の計算を行う時に必要になる．ω_+ の計算の時に次のような主張が成立していれば非常に見通しが良くなる．

問題 5.1. ある条件の下で，$W_+ h^{-1/2} = h_0^{-1/2} W_+$ が成立するか？ここで，W_+ は式 (4.1) で与えられるものである．

条件 (A)，(B)，(Abs) と [5, Proposition II.2] より，$\psi \in \mathfrak{k}$ ならば $(0, g), (c, \psi) \in \mathcal{K}_{\mathrm{ac}}(h) \cap \mathcal{D}(h^{-1/2})$ がわかるのでもし問題 5.1 が成立すると，次がわかる．

定理 5.2. 問題 5.1 が成立してかつ，定理 3.2 の仮定のもとで，ω_+ が存在して，以下の等式が成立する．

$$\omega_+(W(f)) = \lim_{t\to\infty} \omega_0 \circ \alpha_t(W(f)) = \exp\left(-\frac{\langle W_+ f, K(0) W_+ f\rangle}{4} + i\Lambda(f)\right). \tag{5.1}$$

ここで，ω_0 は式 (4.2)，W_+ は式 (4.1)，Λ は式 (3.15)，$K(0) = K(0, \ldots, 0)$ で式 (4.3) で与えられるものである．

5.2　グラフラプラシアンに対する Mourre の定理

論文 [6] では，グラフ G の隣接行列 A_G に対する Mourre の評価を用いてスペクトル解析を行なった．正則グラフの場合は $-\Delta_G = \|A_G\|\mathbb{1} - A_G$ なので，論文 [6] の議論を用いて，条件 (A) や (Abs) を確かめることができるが，G が正則でない場合は $-\Delta_G$ と $\|A_G\|\mathbb{1} - A_G$ は違う作用素になる．なので，G を非正則グラフ，$h_{0,k} = -\Delta_G$ とした時に条件 (A) や (Abs) を確かめるのが非常に困難である．

問題 5.3. グラフ G に良い条件 (例えば adapted のような) があった際に，ある非自明な部分空間 $L \subset \ell^2(VG)$ が存在して，任意の $\xi \in L$ に対して，

$$\sup_{\nu\in\mathbb{R},\varepsilon>0} \left|\langle \xi, (\nu - \Delta_G + i\varepsilon)^{-1}\xi\rangle\right| < C_\xi \tag{5.2}$$

とできるか？ここで，C_ξ は ξ に依存する正の定数である．

問題 5.3 が解けると特に非正則グラフの具体例を増やすことができる．グラフラプラシアンに対する PF ウェイトは $v \equiv 1$ なので，特にジョセフソン流の部分も計算できる．

参考文献

[1] O. Bratteli, D. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics II*, 2nd edition (Springer, 1997).

[2] F. Fidaleo, D. Guido, T. Isola, *Bose-Einstein condensation on inhomogeneous amenable graphs.* Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **14** (2011), no. 2, 149–197.

[3] F. Fidaleo, *Harmonic analysis on inhomogeneous amenable networks and the Bose-Einstein condensation.* J. Stat. Phys. **160** (2015), no. 3, 715–759.

[4] T. Kanda, *Remarks on BEC on graphs*, Rev. Math. Phys. **29** (2017), no. 8, 1750024, 19 pp.

[5] T. Kanda, *A model of Josephson junctions on Boson systems–Currents and entropy production rate*, J. Math. Phys. **59** (2018), no. 10, 102107, 23pp.

[6] M. Măntoiu, S. Richard, R. Tiedra de Aldecoa, *Spectral Analysis for Adjacency Operators on Graphs.* Ann. Henri Poincaré. **8** (2007), no. 7, 1401–1423.

[7] T. Matsui, *BEC of free bosons on networks.* Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **9** (2006), no. 1, 1–26.

[8] M. Mintchev, L. Santoni, P. Sorba, *Microscopic Features of Bosonic Quantum Transport and Entropy Production.* Annalen der Physik **530** (2018) 201800170.

[9] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. III. Scattering theory.* Academic Press, New York-London, 1979.

[10] M. Reed, S. Barry, *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators.* Academic Press, New York-London, 1978.

[11] D. Ruelle, *Entropy production in quantum spin systems.* Comm. Math. Phys. **224** (2001), no. 1, 3–16.